

# Caracterización de Soluciones en Teoría de Juegos

Francisco Sánchez Sánchez

Encuentro de Matemáticas Aplicadas  
ICIMAF  
La Habana, Cuba  
Abril, 2009.

# La técnica

- ▶  $G$  espacio de problemas
- ▶  $S$  espacio de soluciones
- ▶  $\varphi : G \rightarrow S$
  
- ▶ A cada problema le queda asignada una solución

$$v \in G \mapsto \varphi(v).$$

- ▶ Se pide que  $\varphi$  satisfaga ciertos axiomas

Axioma 1

Axioma 2

Axioma  $m$

# La técnica

- ▶  $G$  espacio de problemas
- ▶  $S$  espacio de soluciones
- ▶  $\varphi : G \rightarrow S$
  
- ▶ A cada problema le queda asignada una solución

$$v \in G \mapsto \varphi(v).$$

- ▶ Se pide que  $\varphi$  satisfaga ciertos axiomas

Axioma 1

Axioma 2

Axioma  $m$

# La técnica

- ▶  $G$  espacio de problemas
- ▶  $S$  espacio de soluciones
- ▶  $\varphi : G \rightarrow S$
  
- ▶ A cada problema le queda asignada una solución

$$v \in G \mapsto \varphi(v).$$

- ▶ Se pide que  $\varphi$  satisfaga ciertos axiomas

Axioma 1

Axioma 2

Axioma  $m$

# La técnica

- ▶  $G$  espacio de problemas
- ▶  $S$  espacio de soluciones
- ▶  $\varphi : G \rightarrow S$
  
- ▶ A cada problema le queda asignada una solución

$$v \in G \mapsto \varphi(v).$$

- ▶ Se pide que  $\varphi$  satisfaga ciertos axiomas

Axioma 1

Axioma 2

Axioma  $m$

# La técnica

- ▶  $G$  espacio de problemas
- ▶  $S$  espacio de soluciones
- ▶  $\varphi : G \rightarrow S$
  
- ▶ A cada problema le queda asignada una solución

$$v \in G \mapsto \varphi(v).$$

- ▶ Se pide que  $\varphi$  satisfaga ciertos axiomas

Axioma 1

Axioma 2

Axioma  $m$

# La técnica

- ▶  $G$  espacio de problemas
- ▶  $S$  espacio de soluciones
- ▶  $\varphi : G \rightarrow S$
  
- ▶ A cada problema le queda asignada una solución

$$v \in G \mapsto \varphi(v).$$

- ▶ Se pide que  $\varphi$  satisfaga ciertos axiomas

Axioma 1

Axioma 2

Axioma  $m$

# La técnica

- ▶  $G$  espacio de problemas
- ▶  $S$  espacio de soluciones
- ▶  $\varphi : G \rightarrow S$
  
- ▶ A cada problema le queda asignada una solución

$$v \in G \mapsto \varphi(v).$$

- ▶ Se pide que  $\varphi$  satisfaga ciertos axiomas

Axioma 1

Axioma 2

Axioma  $m$

# La técnica

- ▶  $G$  espacio de problemas
- ▶  $S$  espacio de soluciones
- ▶  $\varphi : G \rightarrow S$
  
- ▶ A cada problema le queda asignada una solución

$$v \in G \mapsto \varphi(v).$$

- ▶ Se pide que  $\varphi$  satisfaga ciertos axiomas

Axioma 1

Axioma 2

Axioma  $m$

# La técnica

- ▶  $G$  espacio de problemas
- ▶  $S$  espacio de soluciones
- ▶  $\varphi : G \rightarrow S$
  
- ▶ A cada problema le queda asignada una solución

$$v \in G \mapsto \varphi(v).$$

- ▶ Se pide que  $\varphi$  satisfaga ciertos axiomas

Axioma 1

Axioma 2

Axioma m

# La técnica

## Teorema

*Existe una única*

$$\varphi : G \rightarrow S$$

*que satisface los axiomas anteriores. Además,*

$$\varphi(v) = \dots$$

# Juegos Cooperativos

- ▶ Dado un conjunto finito de jugadores  $N = \{1, \dots, n\}$ , un juego cooperativo se define como una función:

$$v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que  $v(\emptyset) = 0$ .

- ▶  $v(S)$  es la valía de la coalición  $S$ .
- ▶  $G$  conjunto de juegos cooperativos con espacio de jugadores  $N$ .
- ▶ Problema: Asociar a cada  $v \in G$ , un vector  $x \in \mathbb{R}^N$ , es decir

$$\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^N$$

# Juegos Cooperativos

- ▶ Dado un conjunto finito de jugadores  $N = \{1, \dots, n\}$ , un juego cooperativo se define como una función:

$$v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que  $v(\emptyset) = 0$ .

- ▶  $v(S)$  es la valía de la coalición  $S$ .
- ▶  $G$  conjunto de juegos cooperativos con espacio de jugadores  $N$ .
- ▶ Problema: Asociar a cada  $v \in G$ , un vector  $x \in \mathbb{R}^N$ , es decir

$$\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^N$$

# Juegos Cooperativos

- ▶ Dado un conjunto finito de jugadores  $N = \{1, \dots, n\}$ , un juego cooperativo se define como una función:

$$v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que  $v(\emptyset) = 0$ .

- ▶  $v(S)$  es la valía de la coalición  $S$ .
- ▶  $G$  conjunto de juegos cooperativos con espacio de jugadores  $N$ .
- ▶ Problema: Asociar a cada  $v \in G$ , un vector  $x \in \mathbb{R}^N$ , es decir

$$\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^N$$

# Juegos Cooperativos

- ▶ Dado un conjunto finito de jugadores  $N = \{1, \dots, n\}$ , un juego cooperativo se define como una función:

$$v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que  $v(\emptyset) = 0$ .

- ▶  $v(S)$  es la valía de la coalición  $S$ .
- ▶  $G$  conjunto de juegos cooperativos con espacio de jugadores  $N$ .
- ▶ Problema: Asociar a cada  $v \in G$ , un vector  $x \in \mathbb{R}^N$ , es decir

$$\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^N$$

## Ejemplo.

Supongamos:

- ▶  $N$  conjunto de museos.
- ▶ boleto común.
- ▶  $v(S)$  lo que se recave con boletos que exactamente visitan los  $S$  museos.
- ▶  $\varphi_i(v)$  lo que le toca al museo  $i$ .

## Ejemplo.

Supongamos:

- ▶  $N$  conjunto de museos.
- ▶ boleto común.
- ▶  $v(S)$  lo que se recave con boletos que exactamente visitan los  $S$  museos.
- ▶  $\varphi_i(v)$  lo que le toca al museo  $i$ .

## Ejemplo.

Supongamos:

- ▶  $N$  conjunto de museos.
- ▶ boleto común.
- ▶  $v(S)$  lo que se recave con boletos que exactamente visitan los  $S$  museos.
- ▶  $\varphi_i(v)$  lo que le toca al museo  $i$ .

## Ejemplo.

Supongamos:

- ▶  $N$  conjunto de museos.
- ▶ boleto común.
- ▶  $v(S)$  lo que se recave con boletos que exactamente visitan los  $S$  museos.
- ▶  $\varphi_i(v)$  lo que le toca al museo  $i$ .

# Juegos cooperativos

Axioma 1 (Aditividad)  $\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w)$

Axioma 2 (Simetría)  $\varphi(\theta v) = \theta\varphi(v)$

Axioma 3 (Eficiencia)  $\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N)$

El jugador  $i$  es un jugador nulo en  $v$  si y sólo si  $v(S \cup \{i\}) = v(S)$  para todo  $S \subseteq N \setminus \{i\}$ .

Axioma 4 (Nulidad) Si  $i$  es un jugador nulo en  $v$  entonces  $\varphi_i(v) = 0$ .

## Teorema

(Shapley 1953) Existe una única  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^N$  que satisface aditividad, simetría, eficiencia y nulidad. Además esta esta dada por

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \not\ni i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

# Juegos cooperativos

Axioma 1 (Aditividad)  $\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w)$

Axioma 2 (Simetría)  $\varphi(\theta v) = \theta\varphi(v)$

Axioma 3 (Eficiencia)  $\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N)$

El jugador  $i$  es un jugador nulo en  $v$  si y sólo si  $v(S \cup \{i\}) = v(S)$  para todo  $S \subseteq N \setminus \{i\}$ .

Axioma 4 (Nulidad) Si  $i$  es un jugador nulo en  $v$  entonces  $\varphi_i(v) = 0$ .

## Teorema

(Shapley 1953) Existe una única  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^N$  que satisface aditividad, simetría, eficiencia y nulidad. Además esta esta dada por

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \not\ni i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

# Juegos cooperativos

Axioma 1 (Aditividad)  $\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w)$

Axioma 2 (Simetría)  $\varphi(\theta v) = \theta\varphi(v)$

Axioma 3 (Eficiencia)  $\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N)$

El jugador  $i$  es un jugador nulo en  $v$  si y sólo si  $v(S \cup \{i\}) = v(S)$  para todo  $S \subseteq N \setminus \{i\}$ .

Axioma 4 (Nulidad) Si  $i$  es un jugador nulo en  $v$  entonces  $\varphi_i(v) = 0$ .

## Teorema

(Shapley 1953) Existe una única  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^N$  que satisface aditividad, simetría, eficiencia y nulidad. Además esta esta dada por

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \not\ni i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

# Juegos cooperativos

Axioma 1 (Aditividad)  $\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w)$

Axioma 2 (Simetría)  $\varphi(\theta v) = \theta\varphi(v)$

Axioma 3 (Eficiencia)  $\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N)$

El jugador  $i$  es un jugador nulo en  $v$  si y sólo si  $v(S \cup \{i\}) = v(S)$  para todo  $S \subseteq N \setminus \{i\}$ .

Axioma 4 (Nulidad) Si  $i$  es un jugador nulo en  $v$  entonces  $\varphi_i(v) = 0$ .

## Teorema

(Shapley 1953) Existe una única  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^N$  que satisface aditividad, simetría, eficiencia y nulidad. Además esta esta dada por

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \not\ni i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

# Juegos cooperativos

Axioma 1 (Aditividad)  $\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w)$

Axioma 2 (Simetría)  $\varphi(\theta v) = \theta \varphi(v)$

Axioma 3 (Eficiencia)  $\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N)$

El jugador  $i$  es un jugador nulo en  $v$  si y sólo si  $v(S \cup \{i\}) = v(S)$  para todo  $S \subseteq N \setminus \{i\}$ .

Axioma 4 (Nulidad) Si  $i$  es un jugador nulo en  $v$  entonces  $\varphi_i(v) = 0$ .

## Teorema

(Shapley 1953) Existe una única  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^N$  que satisface aditividad, simetría, eficiencia y nulidad. Además esta esta dada por

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \not\ni i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

# Juegos y gráficas



$$(N, \nu) \tag{1}$$



$$g^N = \{\{i, j\} \mid i \in N, j \in N, i \neq j\}$$



$$GR = \{g \mid g \subseteq g^N\}$$



## Definición

A la función  $\psi : GR \rightarrow \mathbb{R}^n$  se le llama regla de asignación si y sólo si para toda  $g \in GR$  y  $S \in N/g$  se tiene que:

$$\sum_{i \in S} \psi_i(g) = \nu(S)$$

# Juegos y gráficas



$$(N, \nu) \quad (1)$$



$$g^N = \{\{i, j\} \mid i \in N, j \in N, i \neq j\}$$



$$GR = \{g \mid g \subseteq g^N\}$$



## Definición

A la función  $\psi : GR \rightarrow \mathbb{R}^n$  se le llama regla de asignación si y sólo si para toda  $g \in GR$  y  $S \in N/g$  se tiene que:

$$\sum_{i \in S} \psi_i(g) = \nu(S)$$

# Juegos y gráficas



$$(N, \nu) \tag{1}$$



$$g^N = \{\{i, j\} \mid i \in N, j \in N, i \neq j\}$$



$$GR = \{g \mid g \subseteq g^N\}$$



## Definición

A la función  $\psi : GR \rightarrow \mathbb{R}^n$  se le llama regla de asignación si y sólo si para toda  $g \in GR$  y  $S \in N/g$  se tiene que:

$$\sum_{i \in S} \psi_i(g) = \nu(S)$$

# Juegos y gráficas



$$(N, \nu) \tag{1}$$



$$g^N = \{\{i, j\} \mid i \in N, j \in N, i \neq j\}$$



$$GR = \{g \mid g \subseteq g^N\}$$



## Definición

A la función  $\psi : GR \rightarrow \mathbf{R}^n$  se le llama regla de asignación si y sólo si para toda  $g \in GR$  y  $S \in N/g$  se tiene que:

$$\sum_{i \in S} \psi_i(g) = \nu(S)$$

# Juegos y gráficas



$$(N, \nu) \tag{1}$$



$$g^N = \{\{i, j\} \mid i \in N, j \in N, i \neq j\}$$



$$GR = \{g \mid g \subseteq g^N\}$$

## ► Definición

A la función  $\psi : GR \rightarrow \mathbf{R}^n$  se le llama regla de asignación si y sólo si para toda  $g \in GR$  y  $S \in N/g$  se tiene que:

$$\sum_{i \in S} \psi_i(g) = \nu(S)$$

# Juegos y gráficas



## Definición

La regla de asignación  $\psi$  es estable si y sólo si para toda  $g \in GR$  y  $\{i, j\} \in g$  se tiene que:

$$\psi_i(g) \geq \psi_i(g \setminus \{i, j\})$$

$$\psi_j(g) \geq \psi_j(g \setminus \{i, j\}).$$



## Definición

La regla de asignación  $\psi$  es justa si y sólo si para toda  $g \in GR$  y  $\{i, j\} \in g$  se tiene que:

$$\psi_i(g) - \psi_i(g \setminus \{i, j\}) = \psi_j(g) - \psi_j(g \setminus \{i, j\}).$$

# Juegos y gráficas

## ► Definición

La regla de asignación  $\psi$  es estable si y sólo si para toda  $g \in GR$  y  $\{i, j\} \in g$  se tiene que:

$$\psi_i(g) \geq \psi_i(g \setminus \{i, j\})$$

$$\psi_j(g) \geq \psi_j(g \setminus \{i, j\}).$$



## Definición

La regla de asignación  $\psi$  es justa si y sólo si para toda  $g \in GR$  y  $\{i, j\} \in g$  se tiene que:

$$\psi_i(g) - \psi_i(g \setminus \{i, j\}) = \psi_j(g) - \psi_j(g \setminus \{i, j\}).$$

# Juegos y gráficas

## ► Definición

La regla de asignación  $\psi$  es estable si y sólo si para toda  $g \in GR$  y  $\{i, j\} \in g$  se tiene que:

$$\psi_i(g) \geq \psi_i(g \setminus \{i, j\})$$

$$\psi_j(g) \geq \psi_j(g \setminus \{i, j\}).$$



## Definición

La regla de asignación  $\psi$  es justa si y sólo si para toda  $g \in GR$  y  $\{i, j\} \in g$  se tiene que:

$$\psi_i(g) - \psi_i(g \setminus \{i, j\}) = \psi_j(g) - \psi_j(g \setminus \{i, j\}).$$

# Juegos y gráficas

## ► Definición

La regla de asignación  $\psi$  es estable si y sólo si para toda  $g \in GR$  y  $\{i, j\} \in g$  se tiene que:

$$\psi_i(g) \geq \psi_i(g \setminus \{i, j\})$$

$$\psi_j(g) \geq \psi_j(g \setminus \{i, j\}).$$

## ► Definición

La regla de asignación  $\psi$  es justa si y sólo si para toda  $g \in GR$  y  $\{i, j\} \in g$  se tiene que:

$$\psi_i(g) - \psi_i(g \setminus \{i, j\}) = \psi_j(g) - \psi_j(g \setminus \{i, j\}).$$

# Juegos y gráficas



## Definición

Para cada pareja  $(\nu, g) \in G \times GR$  sea  $\nu/g \in G$  definido por:

$$(\nu/g)(S) = \sum_{T \in S/g} \nu(T).$$



## Teorema

(Myerson). Dado un juego  $\nu$  existe una única regla de asignación justa  $\psi : GR \rightarrow \mathbb{R}^n$  la cual esta dada por:

$$\psi(g) = Sh(\nu/g) \text{ para todo } g \in GR$$

donde  $Sh$  es el Valor de Shapley. Además si  $\nu$  es superaditivo la regla de

# Juegos y gráficas

## ► Definición

Para cada pareja  $(\nu, g) \in G \times GR$  sea  $\nu/g \in G$  definido por:

$$(\nu/g)(S) = \sum_{T \in S/g} \nu(T).$$



## Teorema

(Myerson). Dado un juego  $\nu$  existe una única regla de asignación justa  $\psi : GR \rightarrow \mathbb{R}^n$  la cual esta dada por:

$$\psi(g) = Sh(\nu/g) \text{ para todo } g \in GR$$

donde  $Sh$  es el Valor de Shapley. Además si  $\nu$  es superaditivo la regla de asignación es estable.

# Juegos y gráficas

## ► Definición

Para cada pareja  $(\nu, g) \in G \times GR$  sea  $\nu/g \in G$  definido por:

$$(\nu/g)(S) = \sum_{T \in S/g} \nu(T).$$



## Teorema

(Myerson). Dado un juego  $\nu$  existe una única regla de asignación justa  $\psi : GR \rightarrow \mathbf{R}^n$  la cual esta dada por:

$$\psi(g) = Sh(\nu/g) \text{ para todo } g \in GR$$

donde  $Sh$  es el Valor de Shapley. Además si  $\nu$  es superaditivo la regla de asignación es estable.

# Juegos y gráficas

## ► Definición

Para cada pareja  $(\nu, g) \in G \times GR$  sea  $\nu/g \in G$  definido por:

$$(\nu/g)(S) = \sum_{T \in S/g} \nu(T).$$

## ► Teorema

(Myerson). *Dado un juego  $\nu$  existe una única regla de asignación justa  $\psi : GR \rightarrow \mathbf{R}^n$  la cual esta dada por:*

$$\psi(g) = Sh(\nu/g) \text{ para todo } g \in GR$$

*donde  $Sh$  es el Valor de Shapley. Además si  $\nu$  es superaditivo la regla de asignación es estable.*

# La distribución de herencias

$$N = \{1, \dots, n\}$$

$$M = \{1, \dots, n\}$$

$A$

$$u \in R^N$$

$$v \in R^N, v_j = \sum_{i \in M} a_{ij}$$

# La distribución de herencias

$$N = \{1, \dots, n\}$$

$$M = \{1, \dots, n\}$$

$A$

$$u \in R^N$$

$$v \in R^N, v_j = \sum_{i \in M} a_{ij}$$

# La distribución de herencias

$$N = \{1, \dots, n\}$$

$$M = \{1, \dots, n\}$$

$A$

$$u \in R^N$$

$$v \in R^N, v_j = \sum_{i \in M} a_{ij}$$

# La distribución de herencias

$$N = \{1, \dots, n\}$$

$$M = \{1, \dots, n\}$$

$A$

$$u \in R^N$$

$$v \in R^N, v_j = \sum_{i \in M} a_{ij}$$

# La distribución de herencias

$$N = \{1, \dots, n\}$$

$$M = \{1, \dots, n\}$$

$A$

$$u \in R^N$$

$$v \in R^N, v_j = \sum_{i \in M} a_{ij}$$

# La distribución de herencias

## Problema

La matriz  $A$ , donde  $a_{ij}$  es el valor que el heredero  $j$  le da al bien  $i$ .

## Solución

$(u, x)$  donde  $u$  es lo que le toca a los herederos en bienes y  $x$  el vector de compensaciones económicas.

$\varphi(u, v)$  compensaciones

# La distribución de herencias

## Problema

La matriz  $A$ , donde  $a_{ij}$  es el valor que el heredero  $j$  le da al bien  $i$ .

## Solución

$(u, x)$  donde  $u$  es lo que le toca a los herederos en bienes y  $x$  el vector de compensaciones economicas.

$\varphi(u, v)$  compensaciones

# La distribución de herencias

## Problema

La matriz  $A$ , donde  $a_{ij}$  es el valor que el heredero  $j$  le da al bien  $i$ .

## Solución

$(u, x)$  donde  $u$  es lo que le toca a los herederos en bienes y  $x$  el vector de compensaciones económicas.

$\varphi(u, v)$  compensaciones

# La distribución de herencias

## Axiomas

A1  $v' \varphi(u, v) = 0$ .

A2  $(u_i + \varphi_i(u, v))v_j = (u_j + \varphi_j(u, v))v_i$  .

A3  $(u, x)$  es óptima de Pareto si y sólo si no existe otra solución  $(\tilde{u}, \tilde{x})$  tal que

$$\tilde{u} + \tilde{x} \geq u + x$$

y la desigualdad estricta para al menos una coordenada.

# La distribución de herencias

## Axiomas

A1  $v' \varphi(u, v) = 0$ .

A2  $(u_i + \varphi_i(u, v))v_j = (u_j + \varphi_j(u, v))v_i$  .

A3  $(u, x)$  es óptima de Pareto si y sólo si no existe otra solución  $(\tilde{u}, \tilde{x})$  tal que

$$\tilde{u} + \tilde{x} \geq u + x$$

y la desigualdad estricta para al menos una coordenada.

# La distribución de herencias

## Axiomas

A1  $v' \varphi(u, v) = 0$ .

A2  $(u_i + \varphi_i(u, v))v_j = (u_j + \varphi_j(u, v))v_i$  .

A3  $(u, x)$  es óptima de Pareto si y sólo si no existe otra solución  $(\tilde{u}, \tilde{x})$  tal que






$$\tilde{u} + \tilde{x} \geq u + x$$

y la desigualdad estricta para al menos una coordenada.

## Teorema

*La solución  $(u, x)$  satisface los axiomas A1, A2 y A3 si y sólo si  $u$  proviene de los mejores postores y  $x = \frac{v' u}{v' v} v - u$ .*

## Referencias

-  Dubey P., Neyman A. and Weber R.J. (1981). “Value Theory without Efficiency”, *Mathematics of Operations Research*, Vol.6, No.1, pp. 122-128.
-  Hernández-Lamonedada L., Juárez-García R. and Sánchez-Sánchez F. “Dissection of cooperative solutions in game theory using representation techniques”, *Int. J. Game Theory* **35** (2007), pp. 395-426.
-  Myerson R. B., (1977) “Graphs and cooperation in games”, *Mathematics of Operations Research*, vol. 2, núm. 3, pp. 225-229.
-  Sánchez Sánchez F., (2002) “About inheritance distribution”, *Journal of Mathematical Economics*, 37, pp.297-309.
-  Shapley L. S., “A value for  $n$ -person games”, *Contribution to the Theory of Games*, vol. 2, 1953, pp. 307-317.